Développement : Prolongement analytique suivant une courbe.

RM

2022-2023

Référence :

1. 131 dev pour l'agreg

Énoncé :

Soit (f, D) une fonction locale et γ un chemin tel que $\gamma(0)$ soit le centre de D. Considérons (f_1, D_1) et $(\tilde{f_1}, \tilde{D_1})$ les éléments terminaux de deux prolongements analytique de (f, D) le long de γ.
On a alors que f_1 et $\tilde{f_1}$ sont égales sur $D_1 \cap \tilde{D_1}$.

On se place dans le contexte suivant:

Une fonction locale est un couple (f, D) où D est un disque ouvert non vide et f est une fonction holomorphe sur D. Soit $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ une courbe. Un prolongement analytique de (f, D) le long de γ est une famille de fonctions locales $(f_t, D_t)_{t \in [0,1]}$ telle que
a) $(f_0, D_0) = (f, D)$
b) pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t)$ est le centre de D_t
c) pour tout $t \in [0,1]$, il existe $\epsilon >$ tel que pour tout $t' \in [0,1]$ vérifiant $|t - t'| < \epsilon, \gamma(t') \in D_t \cap D_{t'}$ et $f_t \equiv f_{t'}$ sur cette intersection.

Résolution : Introduisons l'ensemble

$$S = \{t_0 \in [0,1] : \forall t \in [0, t_0], f_t \equiv \tilde{f}_t \text{ sur } D_t \cap \tilde{D}_t\}.$$

L'ensemble S n'est pas vide car il contient 0 par définition. De plus, comme $S \subset [0,1]$ et que le segment $[0,1]$ est connexe, il suffit de prouver que S est fermé et ouvert pour conclure que $S = [0,1]$.

- Prouvons que S est fermé.

Si $t_0 \in S$, alors tous les $t \leq t_0$ sont également dans S, de sorte que pour prouver que S est fermé, il suffit de prouver que toute limite de suite croissante $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S demeure dans S. Soit $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une telle suite et t_∞ sa limite dans $[0,1]$.
On applique la propriété c) à t_∞ et $(f_{t_\infty}, D_{t_\infty})$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t' \in [0,1]$ vérifiant $|t' - t_\infty| < \epsilon$, on a $\gamma(t') \in D_{t_\infty} \cap D_{t'}$ et

$$f_{t_\infty} \equiv f_{t'} \text{ sur } D_{t_\infty} \cap D_{t'}.$$

On fait de même sur notre autre prolongement analytique, soit sur t_∞ et $(\tilde{f_{t_\infty}}, \tilde{D_{t_\infty}})$, alors il existe $\tilde{\epsilon} > 0$ tel que pour tout $t' \in [0,1]$ vérifiant $|t' - t_\infty| < \tilde{\epsilon}$, on a $\gamma(t') \in \tilde{D_{t_\infty}} \cap \tilde{D}_{t'}$ et

$$\tilde{f_{t_\infty}} \equiv \tilde{f}_{t'} \text{ sur } \tilde{D_{t_\infty}} \cap \tilde{D}_{t'}.$$

Soit $j \in \mathbb{N}$ suffisamment grand tel que $|t_j - t_\infty| < \min(\epsilon, \tilde{\epsilon})$. En particulier, il vient

$$f_{t_\infty} \equiv f_{t_j} \text{ sur } D_{t_\infty} \cap D_{t_j} \qquad \text{et} \qquad \tilde{f_{t_\infty}} \equiv \tilde{f}_{t_j} \text{ sur } \tilde{D_{t_\infty}} \cap \tilde{D}_{t_j} \qquad (*)$$

De plus on a aussi que

$$\gamma(t_j) \in D_{t_j} \cap \tilde{D_{t_j}} \cap \tilde{D_{t_\infty}} \cap D_{t_\infty}$$

Puisque $t_j \in S$, on a également que

$$f_{t_j} \equiv \tilde{f_{t_j}} \text{ sur } D_{t_j} \cap \tilde{D_{t_j}}.$$

Ainsi, on obtient $f_{t_\infty} \equiv f_{t_j} \equiv \tilde{f_{t_j}} \equiv \tilde{f_{t_\infty}}$ sur l'intersection $D_{t_j} \cap \tilde{D_{t_j}} \cap D_{t_\infty} \cap \tilde{D_{t_\infty}}$ qui est un ouvert non vide. En particulier, $f_{t_\infty} \equiv \tilde{f_{t_\infty}}$ sur cette intersection. Par le principe des zéros isolés/Prolongement analytique, alors f_{t_∞} et $\tilde{f_{t_\infty}}$ coïncident donc sur $D_{t_\infty} \cap \tilde{D_{t_\infty}}$, autrement dit $t_\infty \in S$. Donc S est fermé

> En effet, comme $\gamma(t_j)$ appartient à l'intersection et que c'est un voisinage de ce point, on en déduit d'après le prolongement analytique que les fonctions sont égales sur l'intersection voulus.

Prouvons que S est ouvert.
Soit T le complémentaire de S dans $[0,1]$. Prouvons que T est fermé. Soit $(t_j)_{\in\mathbb{N}}$ une suite de T convergeant vers une limite notée t_∞. Pour $j \in \mathbb{N}$, puisque $t_j \notin S$, il existe $s_j \in [0,1]$ tel que $s_j \leq t_j$ et

$$f_{s_j} \not\equiv \tilde{f_{s_j}} \text{ sur } D_{s_\infty} \cap \tilde{D_{s_\infty}}.$$

Quitte à extraire une sous-suite de $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ (car bornée BZ), on peut supposer qu'elle converge vers une limite notée $s_\infty \in [0,1]$. On a alors $s_\infty \leq t_\infty$ car pour tout $j \geq 1$, on a $s_j \geq t_j$.
Il suffit donc de prouver que

$$f_{s_\infty} \not\equiv \tilde{f_{s_\infty}} \text{ sur } D_{s_\infty} \cap \tilde{D_{s_\infty}}$$

car cela prouverai bien que t_∞ n'est pas dans S, et donc que $t_\infty \in T$.
Supposons par l'absurde que les deux fonctions coïncident. On aurait alors la même situation que le premier cas et on peut arriver à $(*)$. et donc pour j assez grand on a bien

$$f_{s_j} \equiv f_{s_\infty} \equiv \tilde{f_{s_\infty}} \equiv \tilde{f_{s_j}} \text{ sur } D_{s_j} \cap \tilde{D_{s_j}} \cap D_{s_\infty} \cap \tilde{D_{s_\infty}}$$

> Dans le cas précédent, c'est car $f_{t_j} \equiv \tilde{f_{t_j}}$ qu'on trouvait la relation car $t_j \in S$, ici c'est grâce à l'hypothèse $f_{s_\infty} \equiv \tilde{f_{s_\infty}}$ qu'on conclut

avec cette intersection qui est toujours non vide avec encore une fois $\gamma(s_j)$ qui y appartient. En utilisant encore une fois le principe du prolongement analytique, on obtient que $f_{s_j} \equiv \tilde{f_{s_j}}$ sur $D_{s_\infty} \cap \tilde{D_{s_\infty}}$. Ce qui est absurde. On en déduit que T est fermé.
Enfin, on a que $S = [0,1]$ et donc $1 \in S$. Ainsi, par définition de S, on déduit que f_1 et $\tilde{f}_1$ coïncident sur $D_1 \cap \tilde{D}_1$.